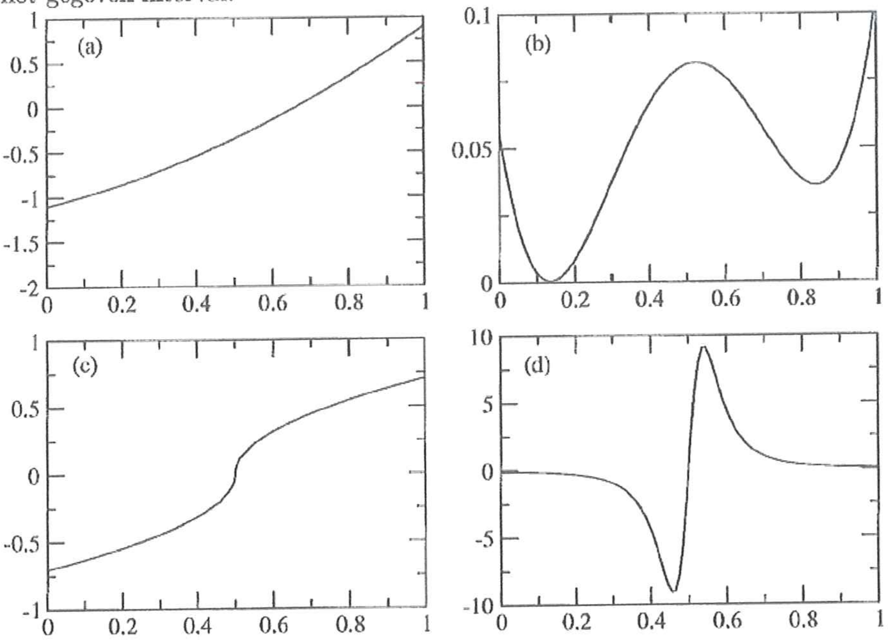
Tentamen Computerondersteund Probleemoplossen

02 april 2013, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit twee opgaven waarvoor in totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: $9 + 1$ (gratis) $= 10$. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Het examen telt mee voor 25 % van het eindcijfer en de practica voor 75 %. Succes!

1. Numerieke bepaling van nulpunten.
   Hieronder zijn vier verschillende functies geschetst met exact één oplossing in het gegeven interval.



   (a) Geef voor elke functie aan of de bisectiemethode wel of niet geschikt is om het nulpunt te bepalen. Zo ja, vermeld dan aan welke voorwaardes de initiële condities moeten voldoen.

   (b) Geef voor elke functie aan of de Newton-Raphson methode wel of niet geschikt is om het nulpunt te bepalen. Zo ja, vermeld dan aan welke voorwaardes de initiële condities moeten voldoen.

   (c) De functie (c) is gegeven door $f(x) = \text{sign}(x-0.5)\sqrt{(|x-0.5|)}$. Beginnend op het interval [0,1], hoeveel iteraties zijn er met de bisectiemethode nodig om een benaderingsfout kleiner dan 10^{-3} te krijgen?

   (d) Leid de uitdrukking voor een Newton-Raphson stap af. Gebruik hierbij een schets.

   (e) Wat is het idee achter 'Inverse Quadratic Interpolation' (IQI)? Gebruik eventueel een schets.

   (f) Geef een voorbeeld waarvoor IQI niet werkt.

2. Interpolatie

   (a) Geef de algemene uitdruking voor het Lagrange-interpolatiepolynoom.

   (b) Bij standaard polynomiale interpolatie wordt een interpolatiepolynoom gezocht van de vorm $P(x) = c_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_n$. De coefficienten (c_i) zijn bepaald door de vergelijking $V\vec{c} = \vec{y}$, waar V bekend staat als de Vandermonde matrix. Geef de algemene uitgrukking voor deze matrix.

   (c) Construeer de Vandermonde matrix voor de dataset $x = [\ 1,\ 2,\ 4,\ 5\ ]$, $y = [\ 0,\ 2,\ 2,\ 6\ ]$.

   (d) Onder welk omstandigheden is de Vandermonde matrix niet singulier?

   (e) Voor stuksgewijs cubische Hermite interpolatie (Piecewise cubic Hermite interpolation) moeten we de functiewaarden (y_k) en de afgeleides (d_k) kennen voor de punten (x_k). Stel dat de afstand $h = x_k - x_{k-1}$ hetzelfde is voor alle k en de "divided difference" (δ_k) dus gegeven is door $\delta_k = (y_{k+1} - y_k)/h$. Hoe wordt d_k dan bepaald voor Shape-Preserving Piecewise Cubic interpolatie?

   (f) Geef een voorbeeld waarvoor stuksgewijs cubische Hermite interpolatie meer geschikt is dan polynomiale interpolatie.

Detailnormering:

1a	1.0	2a	1.0
b	1.0	b	1.0
c	0.5	c	0.5
d	1.0	d	0.5
e	0.5	e	1.0
f	0.5	f	0.5

Dit is in totaal 9 punten plus een gratis punt voor het netjes inleveren.

1 Bepalen van nulpunten

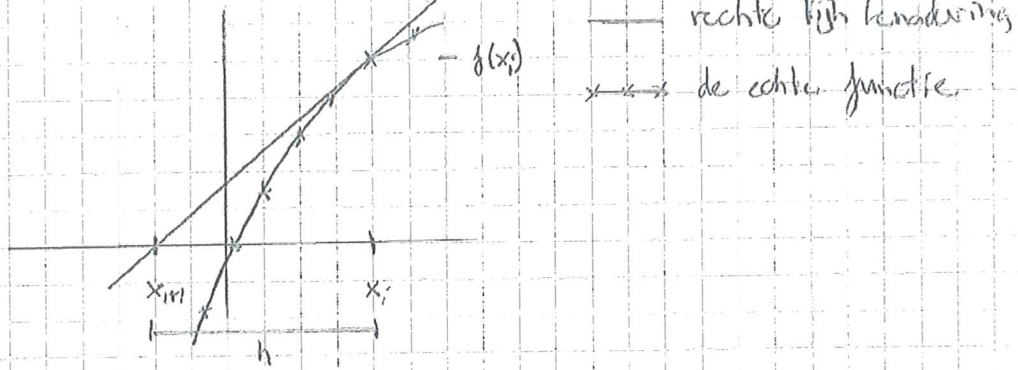
a) De bisectie methode werkt voor a, c en d zonder problemen als de linker gok onder 0.7 ligt en de rechter boven 0.7.
1 De methode werkt niet voor b omdat er alleen positive functiewaardes zijn (behalve het punt waar de functie 0 is).

b) De Newton-Raphson methode werkt voor a zonder voorwaardes. Voor b moet de initiële waarde tussen 0 en ongeveer 0.5 liggen. Voor hogere waardes zijn er plekken waar de functie helling 0 heeft en we kunnen komen vast zitten rond het minimum bij 0.8.
Voor c zal Newton-Raphson helemaal niet werken. Dit
1 is 'the perverse function' uit Moler. Als we het punt x gebruiken als initiële waarde komen we bij het volgende stap bij 0.5-x terecht en daarna komen we terug aan x en zo kunnen we oneindig blijven doorgaan.
Voor d werkt Newton-Raphson allen met initiële waardes tussen de twee maxima rond 0.85 en 0.55.

c) De fout in de bisectie methode is $(a-b)(\frac{1}{2})^n$. Bij de gegeven functie krijgen we wel in eerste stap het goede
0.5 antwoord als we met a=1 en b=0 beginnen. In het algemeen hebben we voor een fout kleiner dan 10^{-3} 10 stappen nodig omdat $2^{10}=1024$.

1. d) In de Newton-Raphson methode gebruiken we de kennis van de huidige x_i-waarde, de waarde $f(x_i)$ en de helling $f'(x_i)$ om een nieuwe x-waarde dichter bij een nulpunt te voorspellen.

1

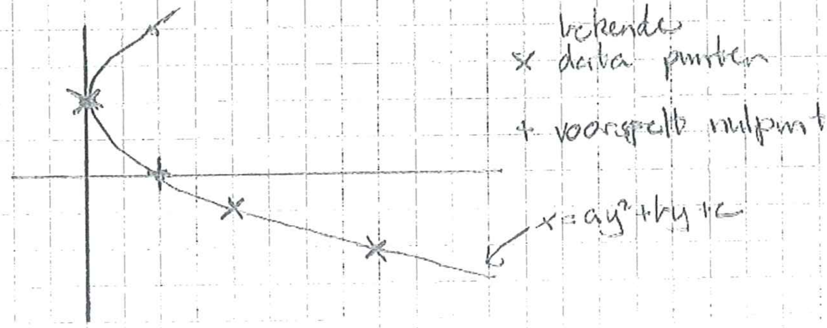


De rechte lijn $y = a\cdot x + b$ snijdt de as als $a \cdot x + b = 0$ of wel $x_{i+1} = -\frac{b}{a}$. Voor de rechte lijn benadering is de helling a $f'(x_i)$, voor $x = x_i$ is $y = f(x_i) \Rightarrow f(x_i) = f'(x_i)\cdot x_i + b$. Dus

$$x_{i+1} = \frac{-(f(x_i) - f'(x_i)\cdot x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

e) Het idee achter IQI is om een fit door drie gokpunten te maken met een gekantelt parabel: $x = ay^2 + by + c$. Deze zal altijd de x-as snijden en kan sneller tot het nulpunt leiden omdat er meer informatie over de functie wordt gebruikt.

0.5



f) We kunnen geen fit maken aan een parabel als voor twee data punten $f(x_i)$ en $f(x_{i+1})$ gelijk zijn. Als $f(x_i)$ en $f(x_{i+1})$ dicht bij elkaar zijn krijgen we onbetrouwbare voorspellingen.

0.5

2 Interpolatie.

a) Het Lagrange-interpolatie polynoom is gegeven door

1 $$P(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

b) De Vandermonde matrix heeft de vorm

1 $$\begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

c) De Vandermonde matrix voor de dataset

$x = [1, 2, 4, 5]$ en $y = [0, 2, 2, 6]$ is gegeven als

0,5 $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

d) De Vandermonde matrix is niet singulier als alle x-waardes
0,5 verschillend zijn.

e) Voor Shape Preserving Piecewise Cubic interpolatie is
$d_k = 0$ als $\delta_k \cdot \delta_{k-1} < 1$ en anders
1 $d_k = 2(\delta_k^{-1} + \delta_{k-1}^{-1})^{-1}$ (de harmonisch gemiddelde)

f) De interpolatie polynoom is niet geschikt als er
0,5 fluctuaties zoals ruis in de data zit. Dit kan leiden
tot wilde fluctuaties.

Correctie codes

A(S) Geen duidelijk antwoord gegeven op vraag −0.5 of −1

Bx Beschrijving van bisectie toepassing voor grafiek x fout −0.25

Cx —||— x niet precies −0.1

Dx Beschrijving van Newton-Raphson toepassing voor x fout −0.25

Ex —||— niet precies −0.1

F Niet duidelijk dat de parabel gekanteld moet zijn −0.2

G Benaderingsfout onvoldoende beschreven (1c) −0.25

H Newton-Raphson onvolledig afgeleid −0.75

I Interpolatie polynoom gedeeltelijk fout of niet op Lagrange vorm opgeschreven −0.5

J Vandermonde matrix onduidelijk of gedeeltelijk opgeschreven (2b) −0.5

K —||— maar 2c −0.25

L d_k niet volledig gegeven −0.5

M Voorbeeld niet goed in 2f omdat stuksgewijs interpolatie in het voorbeeld ook niet zal werken −0.3

N d_k voor $\delta_{k-1}\delta_k < 0$ niet gegeven −0.1

O Vandermonde matrix in fout volgorde van kolommen −0.2

P Geen afleiding gegeven −0.75

Q Voorbeeld IQI niet duidelijk −0.2

R Voorbeeld IQI ook het geval voor NR en andere methodes −0.2

S Het is niet aangegeven dat $x_j \neq x_k$ moet zijn −0.1